03/03/2016

Πρόταση: Έστω $\mathbb{F}$ σώμα, $\lambda(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\lambda(x) \neq 0$

Τότε $\exists$ μοναδικά $\pi(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ ώστε

$$g(x) = \pi(x)\lambda(x) + r(x)$$

και είτε $r(x) = 0$, είτε $r(x) \neq 0$ και

$$\deg r(x) < \deg \lambda(x)$$

① Παρατήρηση

Το $\lambda(x)$ διαιρεί το $g(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$ αν και μόνο αν $r(x) = 0$

② παρατήρηση

Ο υπολογισμός των $\underbrace{\pi(x)}_{\text{πηλίκο διαίρεσης}}$, $\underbrace{r(x)}_{\text{υπόλοιπο}}$ είναι εύκολος

#2

I)

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 7x + 2 & x^2 + x + 2 \\
\underline{-3x^5 - 3x^4 - 6x^3} & 3x^3 - x^2 - 5x + 7 \\
0 \quad -x^4 - 6x^3 + 0x^2 - 7x + 2 & \\
\quad \underline{x^4 + x^3 + 2x^2} & \\
\quad 0 \quad -5x^3 + 2x^2 - 7x + 2 & \\
\qquad \underline{5x^3 + 5x^2 + 10x} & \\
\qquad 0 \quad 7x^2 - 7x - 14 & \\
\qquad \quad \underline{-7x^2 - 7x - 14} & \\
\qquad \qquad -4x - 12 &
\end{array}
$$

Άρα πηλίκο διαίρεσης: $3x^3 - x^2 - 5x + 7$

Υπόλοιπο διαίρεσης: $-4x - 12$

③ Παρατήρηση
Έστω $a \in \mathbb{F}$ και $\lambda(x) = x - a$. Έστω $g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Εύκολα βλέπουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $g(x)$ με το $\lambda(x) = x - a$ είναι ίσο με $g(a)$

Απόδ
$$g(x) = n(x)(x-a) + r(x) \xRightarrow{\text{για } x=a} r(a) = g(a)$$

Συμπέρασμα
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
a) a ρίζα του $g(x)$
β) $x - a$ διαιρεί το $g(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$.

Πόρισμα
Έστω $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\deg g(x) \geq 2$. Αν $g(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{F}[x]$ τότε δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{F}$. Γιατί αν $a \in \mathbb{F}$ ρίζα, το $x - a$ διαιρεί το $g(x)$

Προσοχή!
Πολυώνυμα βαθμού 1 στο $\mathbb{F}[x]$ είναι πάντα ανάγωγα και (προφανώς) πάντα έχουν (μοναδική) ρίζα

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και $f(x) \in \mathbb{F}[x]$

$\deg f(x) = 1$	Τότε $f(x)$ ανάγωγο και έχει ρίζα στο $\mathbb{F}$
~~deg f(x)...~~ $\deg f(x) = 3$ ή $\deg f(x) = 2$	$f(x)$ ανάγωγο αν και μόνο αν $f(x)$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{F}$
$\deg f(x) \geq 4$	$f(x)$ ανάγωγο $\Rightarrow$ δεν έχει ρίζα. Το αντίστροφο δεν ισχύει

π.χ

$f(x) = (x^2+1)^2 \in \mathbb{R}[x]$

δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$

Επιχείρημα

Υποθέτουμε $\deg f(x) \in \{2, 3\}$ θ.δ.ο

αν όχι ανάγωγ $\Rightarrow$ $f(x)$ έχει ρίζα

Απόδ

Αφού $f(x)$ όχι ανάγωγο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ όχι σταθερά με

$f(x) = \lambda_1(x) \cdot \lambda_2(x)$

Άρα 2 ή $3 = \deg f(x) = \deg \lambda_1(x) + \deg \lambda_2(x)$

Άρα ένα τουλάχιστον από τα $\lambda_1(x)$ ή

$\lambda_2(x)$ είναι βαθμού 1. Έστω $\lambda_i(x) = cx - b$,

$c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{F}$. Τότε το $\lambda(x)$ έχει ρίζα $bc^{-1} \in \mathbb{F}$. Άρα και το $f(x)$ έχει ρίζα.

Πρόταση

Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\deg f(x) = n \geq 1$. Τότε το $f(x)$ έχει το πολύ n διακεκριμένες ρίζες στο $\mathbb{F}$.

π.χ

Ένα πολυώνυμο βαθμού $= 29$ έχει ≤ 29 διακεκριμένες ρίζες.

Απόδ

Επαγωγή στο n. Αν $n = 1$ απο προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n-1$ και $\deg f(x) = n$. Έστω a ρίζα του $f(x)$. Τότε $f(x) = \pi(x)(x-a)$ για κάποιο $\pi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\deg \pi(x) = n-1$. Απο επαγωγική υπόθεση το $\pi(x)$ έχει $\leq n-1$ διακεκρ. ρίζες στο $\mathbb{F}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ έχει $\leq n$ διακεκριμένες ρίζες στο $\mathbb{F}$.

Επανάληψη

Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ με $\deg f(x) \geq 1$. Τότε το $f(x)$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{C}[x]$ αν και μόνο αν $\deg f(x) = 1$.

Έστω $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $\deg g(x) \geq 1$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $g(x)$ ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$
ii) Είτε $\deg g(x) = 1$ είτε $\deg g(x) = 2$ και το $g(x)$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

A ②

<u>Παρατήρηση</u>
Έστω $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Πώς βρίσκουμε τις (μοναδικές) ρίζες του $f(x)$;

Αν ο βαθμός του $f(x) = 1$ ~~[illegible]~~ έχει μοναδική ρίζα και τη βρίσκουμε με το προφανή τρόπο

$\deg f(x) = 1 \rightsquigarrow f(x) = cx - 6$ για $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, $6 \in \mathbb{R}$
ρίζα $x = \frac{6}{c}$

$\deg f(x) = 2$

Αν $\deg f(x) = 3$ ή $\deg f(x) = 4$ υπάρχουν τύποι που δίνουν όλες τις μοναδικές ρίζες του $f(x)$. Οι τύποι είναι πολύ περίπλοκοι και με λίγη χρησιμότητα στην πράξη (wikipedia)

Αν $\deg f(x) \geq 5$ (Galois : Αλγεβρικές δομές II)

Υπάρχουν όμως μέθοδοι της αριθμητικής ανάλυσης που δίνουν προσεγγιστικά τις ρίζες δηλαδή δίνουν ακολουθίες που συγκλίνουν στις ρίζες

A ②

Πρόταση

(Ρητές ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές).

Έστω $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_dx^d$

Υποθέτουμε $a_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i$, $a_0 \neq 0$ και $a_d \neq 0$

Έστω $p, q \in \mathbb{Z}$ με $q \neq 0$ και ΜΚΔ $= 1$. Αν $\frac{p}{q}$ ρίζα του $f(x)$ τότε

Τότε το $p \mid a_0$ και $q \mid a_d$

Απόδ.

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=0 \iff a_0 + a_1\frac{p}{q} + \dots + a_d\frac{p^d}{q^d} = 0$$

$$\iff a_0 q^d + a_1 q^{d-1} p + \dots + a_{d-1} p^{d-1} q + a_d p^d = 0 \quad (*)$$

Η $(*) \Rightarrow p \mid a_0 q^d$ και $(p,q)=1 \Rightarrow p \mid a_0$

Η $(*) \Rightarrow q \mid a_d p^d$ " " " $\Rightarrow q \mid a_d$.

Παρατήρηση

Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να υπολογίζουμε όλες τις ρίζες στο $\mathbb{Q}$ ενός πολυωνύμου με συντελεστές στο ~~$\mathbb{Q}$~~ $\mathbb{Z}$

π.χ

Ασκ 2

- $f(x)=1x^3-x^2+2x-2$

Έστω $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ ρίζα του $f(x)$ με

$q,p\in\mathbb{Z}$, $q>0$ και ΜΚΔ$(p,q)=1$

Τότε από τη πρόταση το p διαιρεί το -2 στο $\mathbb{Z}$ και το q διαιρεί το 1 στο $\mathbb{Z}$.

Άρα $p\in\{1,-1,2,-2\}$ και $q=1$

Δοκιμάζουμε $\frac{1}{1}$, $-\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $-\frac{2}{1}$ και βρίσκουμε

ότι το 1 είναι ρίζα του $f(x)$

Άρα το $x-1$ διαιρεί το $f(x)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & +2x & -2 & x-1 \\ \hline
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \\ \hline
0 & 0 & 2x & -2 & \\
 & & -2x & +2 & \\ \hline
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Άρα $f(x)=(x-1)(x^2+2)$ στο $\mathbb{Q}[x]$

$=(x-1)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$

Άρα στο $\mathbb{Q}$ το $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα 1 με πολλαπλότητα 1

Άρα στο $\mathbb{C}$ το $f(x)$ έχει τρεις ρίζες: 1, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$ καθε μία με πολλαπλότητα 1.

Στο $\mathbb{R}$ έχει μια ρίζα 1 με πολλ 1
Στο $\mathbb{Q}$ " " " " 1

• $f(x)=6x^3+7x^2-9x+2$

Έστω $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ρίζα του $f(x)$ με $p, q \in \mathbb{Z}$, $q>0$ και $ΜΚΔ(p,q)=1$
Τότε από την πρόταση το p διαιρεί το 2 στο $\mathbb{Z}$ και το q διαιρεί το 6 στο $\mathbb{Z}$.
Άρα $p \in \{1,-1,2,-2\}$ και $q \in \{1,-1,3,-3,6,-6\}$ Δοκιμάζουμε

τα δυνατά $\frac{p}{q}$ και βρίσκουμε

Ρίζες	πολλαπλότητα
-2	1
$1/2$	1
$1/3$	1

• $x^4-7x^3+18x^2-20x+8$

$f(x)=x^4-7x^3+18x^2-20x+8$ του $f(x)$

→ Υποψήφιες ρητές ρίζες $\frac{p}{q}$, $q=1$,

$p \mid 8$ στο $\mathbb{Z}$ άρα $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

Με δοκιμή 1 ρίζα.

Με πράξεις το $f(x)=(x-1)\cdot\underbrace{(x^3-6x^2+12x-8)}_{p(x)}$

→ Υποψήφιες ρητές ρίζες του $p(x)$

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

Με δοκιμή 2 ρίζα του $p(x)$

Με διαίρεση $p(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$

Άρα $f(x)=(x-1)p(x)=(x-1)(x-2)(x-2)^2$
$=(x-1)(x-2)^3$

Άρα στο $\mathbb{Q}$ (και στο $\mathbb{R}$, και στο $\mathbb{C}$)

Ρίζες	πολλαπλότητα
1	1
2	3

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Έστω $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_\mu\end{pmatrix}$, $b\in\mathbb{F}^{\nu\times 1}$

(Σ) $\boxed{Ax = b}$

$B = [A|b] \in \mathbb{F}^{\nu \times (n+1)}$ ο επαυξημένος πίνακας.

Σύνολο λύσεων $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times 1} : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \right\}$

<u>Υπενθύμιση</u>

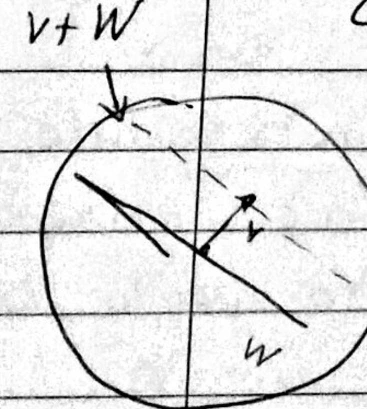
Ισχύει η Βαθμίδα $A \leq$ Βαθμίδα $(A|b)$.

Το (Σ) έχει λύση, δηλ $S \neq \emptyset$ αν και μόνο αν Βαθμίδα $(A) =$ Βαθμίδα $(A|b)$

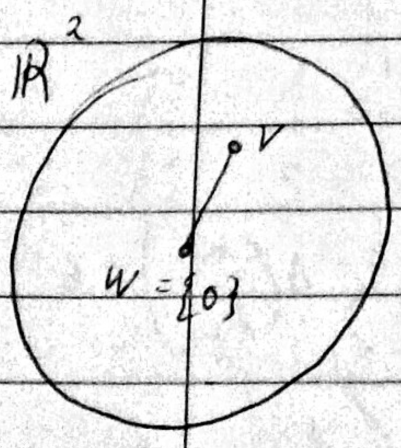
<u>Ορισμός</u>

Έστω V δ.χ. επί του $\mathbb{F}$, W υπόχωρος του V, $v \in V$. Ορίζουμε το "σύμπλοκο"

$v + W = \{ v + w : w \in W \} \subseteq V$ (υποσύνολο αλλά όμως όχι υπόχωρος)



Το $v+W$ γεωμετρικά είναι η ευθεία που περνά από το σημείο v και είναι προς τον υπόχωρο W



$v + W = \{v\}$

Αν $W = \mathbb{R}^2$ φανερά $v + W = \mathbb{R}^2$ $\forall v \in \mathbb{R}^2$

Συμπέρασμα

Τα σύμπλοκα στο $\mathcal{S}_+ \mathbb{R}^2$ είναι τα εξής:

i) Σημεία του $\mathbb{R}^2$

ii) Ευθείες του $\mathbb{R}^2$

iii) Το $\mathbb{R}^2$

Ομοίως στον $\mathcal{S}.x\ \mathbb{R}^3$ τα σύμπλοκα είναι

i) Σημεία του $\mathbb{R}^3$

ii) Ευθείες του $\mathbb{R}^3$

iii) Επίπεδα του $\mathbb{R}^3$

iv) Το $\mathbb{R}^3$

Πρόταση

Υποθέτουμε ότι το (Σ) δεν είναι αδύνατο.
Έστω $v = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ μια λύση του (Σ).

Έστω (Σ') το "αντίστοιχο ομογενές σύστημα" $Ax = \mathbb{O}_{\mu \times 1}$ και $W \leq \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ ο υπόχωρος λύσεων του (Σ'). Τότε για το σύνολο λύσεων S του (Σ) ισχύει

$S = W + v$

δηλ. S "σύμπλοκο" στο $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$.

Απόδ

a) Δείχνουμε $S \subseteq W + v$

Πράγματι έστω $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix} \in S \Rightarrow \begin{cases} A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix} = b \\ A\ v = b \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A\Big(\overbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_\mu\end{pmatrix}-v}^{w}\Big) = b-b = 0_{\mu\times 1}$$

Άρα $w\in W$ και $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_\mu\end{pmatrix} = w+v \in W+v$

Αντίστροφα αν $w\in W$, $A(w+v) = Aw+Av =$
$= 0_{\mu\times 1} + b = b$ Άρα $w+v\in S$ δηλ.
S σύμπλοκο στο $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$

Ορισμός

Έστω $v\in V$, W υπόχωρος του V.
Ορίζουμε $\dim(W+v) = \dim W$

Πόρισμα

Έστω ότι το (Σ) έχει σύνολο λύσεων $S\neq\emptyset$. Τότε το S είναι σύμπλοκο του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$ διάστασης μ - Βαθμίδα(A).
αριθμός αγνώστων

(Φυσικά αν (Σ) ομογενές, το S είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$ διάστασης)

Πόρισμα

(ειδική περίπτωση)

Έστω $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και S το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ΤΑΕΙ

i) A αντιστρέψιμος

ii) $S = \left\{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}$

Παρατήρηση: Στη συνέχεια για ομογενή συστήματα

ν εξισώσεις με ν αγνώστους έχει και ν μη-
δενικές λύσεις αν και μόνο αν η ορίζουσα
του πίνακα του συστήματος είναι ίση με 0
$(\det A = 0)$

Π.χ.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (Σ)$$

(για λύση Σ(Σ) = λύση ομογ + ν όταν $S \neq \emptyset$)

Σ' το αντίστοιχο ομογενές

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Σύνολο λύσεων του (Σ')

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} : \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Μια λύση του (Σ) είναι $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Άρα το σύνολο λύσεων S του (Σ) είναι το "σύμπλοκο"

$$S = W + V = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\xi_2 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} : \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Υπενθύμιση: Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ορίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(x) = \det(A - I_\nu)$$

Ορισμός

Το $6 \in \mathbb{F}$ λέγεται ΙΔΙΟΤΙΜΗ του A αν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$\chi_A(x)$.

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\delta \in \mathbb{F}$. ΤΑΕΙ

i) δ ιδιοτιμή του A

ii) $\det(A-\delta I_\nu)=0$

iii) Αν S το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος

(Σ): $(A-\delta I_\nu)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_\nu\end{pmatrix} = \mathbb{O}_{\nu\times 1}$ τότε $\dim S \geq 1$, δηλ. το σύστημα (Σ) έχει και μη τετριμμένες λύσεις

iv) $\exists$ $w \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ με $w \neq O_{\nu\times 1}$ ώστε $A\cdot w = \delta w$.

Απόδ

Άσκηση όπως τα προηγούμενα.

Ορισμός: Αν δ ιδιοτιμή του $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ συμβολίζουμε $V_A(\delta)$ να είναι το σύνολο λύσεων του (Σ) και λέμε ότι ο $V_A(\delta)$ είναι ο ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή δ του A